

基于非线性小波阈值的各向异性扩散方程

姜东焕, 冯象初, 宋国乡

(西安电子科技大学理学院应用数学系, 陕西西安 710071)

摘要: 本文给出了林石算子定义的扩散方程的小波阈值等价形式, 并在此基础上对林石算子定义的扩散系数计算公式进行了修改, 将其中估计各阶导数时所用的高斯线性滤波图像改成平移不变小波非线性阈值图像, 这样避免了高斯滤波引起的过度光滑和边界移动. 实验结果表明新的扩散方程在保持边缘位置的同时能更有效地去除噪声.

关键词: 各向异性; 扩散方程; 小波阈值

中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2006) 01-0170-03

An Anisotropic Diffusion Equation Based on Nonlinear Wavelet Shrinkage

JIANG Dong-huan, FENG Xiang-chu, SONG Guo-xiang

(Department of mathematics Xi'an University, Xi'an, Shaanxi 710071 China)

Abstract This paper presents an equivalent form via wavelet threshold of the diffusion equation defined by Lin-shi operator. Based on the equivalent form, there are some revisions made for the diffusion coefficient by replacing the Gaussian filtered image with the translation invariant nonlinear wavelet thresholded image when do estimation of all the derivation levels. This revision will be able to avoid the over-smoothness and edge movement resulting from the Gaussian filter. Finally, experimental results show that the new diffusion equation is effective to eliminate noise while maintaining the edge location.

Key words anisotropic; diffusion equation; wavelet shrinkage

1 引言

1 针对 Perona-Malik 算子^[1]和 Catté 算子^[2]不能保留图像窄边缘的缺点, 林宙辰和石青云^[3,4]于 1999 年提出了一种新算子, 以下简称为林石算子. 它具有以上两个算子的优点: 能够去除噪声, 性能稳定及保持边缘位置. 它还能保持图像中有意义的较强的尖峰和窄边缘. 具体地说, 它把扩散系数修改为

$$g = e^{-((\|\nabla(G_0 \circ I)\|^2 + (G_0 \circ I_{xx})^2 + 2(G_0 \circ I_{xy})^2 + (G_0 \circ I_{yy})^2)k^2)} \quad (1)$$

在尖峰处, $\|\nabla I\| = 0$ 但是由于尖峰处二阶导数往往是局部极大值, 在零交叉点处, 二阶导数往往较小, 所以根据 (1) 可知在尖峰处, 扩散系数变的较小, 因此扩散的就比较慢, 有利于保持尖峰. 从而保留了细节边缘, 处理后的图像有较强的真实感.

高斯模糊实际上是一种线性低通滤波, 这种滤波使得图像的边界及大梯度地方也被模糊掉了. 使用线性低通滤波会有边界移位, 为了避免高斯滤波的这些缺点, 构造一个非线性滤波的扩散系数是很重要的.

2 林石算子的等价形式

2.1 离散扩散方程与小波阈值之间的等价关系

PMrazek 和 JW eikert^[5]研究了对于一维信号来说, 在一定条件下扩散方程和平移不变小波阈值之间有等价关系. 即扩散的一步稳定的离散与单尺度的平移不变 Haar 小波阈值是等价的, 并且从现有的扩散函数推出了新的阈值函数. 我们经常使用的阈值函数也对应着一些典型的扩散函数. 在二维情况存在同样的结论^[6], 设 S 表示平移不变 Haar 小波阈值, τ 为扩散方程的时间步长, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分别表示四个包含 (i, j) 点的 2×2 邻域

$$\{i+1, j\} \times \{j, j+1\}; \{i+1, j\} \times \{j-1, j\}; \\ \{i-1, j\} \times \{j, j+1\}; \{i-1, j\} \times \{j-1, j\}$$

$\omega \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $V_\omega^\omega, W_x^\omega, W_y^\omega, W_{xy}^\omega$ 表示图像在 ω 邻域的一层 Haar 小波分解, g 为扩散系数, 那么当满足

$$S(W_x^\omega) = W_x^\omega (1 - 4\tau g((W_x^\omega)^2 + (W_y^\omega)^2)), \\ S(W_y^\omega) = W_y^\omega (1 - 4\tau g((W_x^\omega)^2 + (W_y^\omega)^2)), \quad (2)$$

$$S(W_{xy}^\omega) = W_{xy}^\omega$$

时, 扩散方程的一步稳定离散与小波单尺度阈值是等价的. 这些基于扩散的小波阈值与一般的小波阈值不同, 它们只是在二维小波分解的水平方向和垂直方向进行耦合阈值, 而保留对角方向的小波系数. 它们具有非线性扩散的一个重要性质, 旋转不变性.

由式(2)可知, 线性扩散一步稳定离散与单尺度的平移不变 Haar小波线性阈值是等价的.

2.2 林石算子的小波阈值等价形式

当 $t = \sigma^2/2$ 时, 经过高斯函数 G_σ 平滑的图像与经过经典热传导方程演化到时刻的图像是相同的, 所以经过高斯平滑就相当于以下单尺度平移不变 Haar小波线性阈值,

$$\begin{aligned} S_I(W_x^\omega) &= (1 - 4t)W_x^\omega, \\ S_I(W_y^\omega) &= (1 - 4t)W_y^\omega, \\ S_I(W_{xy}^\omega) &= W_{xy}^\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

又因高斯卷积与求导算子可交换顺序, 我们可以先对图像做高斯卷积再求导, 从而林石算子的等价形式为:

$$g = e^{-((\|\nabla(SI)\|^2 + (SI)_x)^2 + 2(SI)_y)^2 + ((SI)_y)^2)K^2} \tag{4}$$

3 新算子

林石算子中高斯滤波会造成对原图像的过度平滑和边界移位. 我们选用非线性小波耦合阈值代替线性高斯滤波能够克服该缺点, 由于一般的小波阈值是在二维小波分解的三个方向上的阈值, 所以它的去噪效果会比小波耦合阈值好一些, 因此我们用一般的非线性小波阈值代替林石算子的等价形式中的线性小波阈值, 就得到了基于非线性小波阈值的各向异性扩散方程. 修改(1)中的扩散系数为:

$$g = e^{-((\|\nabla(SI)\|^2 + (SI)_x)^2 + 2(SI)_y)^2 + ((SI)_y)^2)K^2} \tag{5}$$

其中 $S_n I$ 表示对图像 I 做平移不变小波非线性阈值^[8]. 因为小波变换具有多分辨率特性, 所以它能够很好地保留边缘; 小波变换经常用于图像去噪中, 所以用基于小波非线性阈值的扩散方程扩散时, 能够很好地去除图像中的噪声.

4 离散格式

我们对时间维采用前向差分, 对 I_x 和 I_y 的逼近采用前向或后向差分均可, 但不能使用中心差分, 因为这样会使尖峰处 $\|\nabla(S_n I)\|^2 + ((S_n I)_{xx})^2 + 2((S_n I)_{xy})^2 + ((S_n I)_{yy})^2$ 的值减小, 不利于保持尖峰. 根据文献[1, 3], 计算格式为:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{k+1} &= I_{ij}^k + \Delta t \cdot (C_N \cdot D_N I_{ij}^k + C_S \cdot D_S I_{ij}^k + C_E \cdot D_E I_{ij}^k \\ &\quad + C_W \cdot D_W I_{ij}^k) \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} D_N I_{ij}^k &= I_{i-1,j}^k - I_{ij}^k & D_S I_{ij}^k &= I_{i+1,j}^k - I_{ij}^k \\ D_E I_{ij}^k &= I_{i,j+1}^k - I_{ij}^k & D_W I_{ij}^k &= I_{i,j-1}^k - I_{ij}^k \\ \vec{T} &= S_n I^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= ((\vec{T})_{xx})_{ij}^2 + 2((\vec{T})_{xy})^2 + ((\vec{T})_{yy})_{ij}^2 \\ C_N &= g(\|\nabla(\vec{T})\|_{i-1,j}^2 + a_{ij}^k) \\ C_S &= g(\|\nabla(\vec{T})\|_{i+1,j}^2 + a_{ij}^k) \\ C_E &= g(\|\nabla(\vec{T})\|_{i,j+1}^2 + a_{ij}^k) \\ C_W &= g(\|\nabla(\vec{T})\|_{i,j-1}^2 + a_{ij}^k) \\ ((\vec{T})_{xx})_{ij} &= (\vec{T})_{i,j-1} - 2(\vec{T})_{ij} + (\vec{T})_{i,j+1} \\ ((\vec{T})_{yy})_{ij} &= (\vec{T})_{i-1,j} - 2(\vec{T})_{ij} + (\vec{T})_{i+1,j} \\ ((\vec{T})_{xy})_{ij} &= ((\vec{T})_{i+1,j+1} - (\vec{T})_{i-1,j-1} - (\vec{T})_{i-1,j+1} \\ &\quad + (\vec{T})_{i+1,j-1})/4 \end{aligned}$$

而且要满足 $0 \leq \Delta t \leq 1/4$ 这是式(6)稳定性的条件. 并且此时容易证明, $m \leq I_{ij}^{k+1} \leq M$, 其中, $m = \min\{I_{i,j}^k, I_{i-1,j}^k, I_{i+1,j}^k, I_{i,j+1}^k, I_{i,j-1}^k\}$, $M = \max\{I_{i,j}^k, I_{i-1,j}^k, I_{i+1,j}^k, I_{i,j+1}^k, I_{i,j-1}^k\}$. 即去噪后的图像不会产生新的极值点.

5 仿真与结论

进行仿真实验时, 需确定两个参数, 梯度阈值 K , 停止时间 T . 在本文中取 $K = 10$, $T = 1$. 在其他文献^[3]中这两个参数的选取都是自适应的, 选取依据见^[3,9]. 本文仿真结果说明这两个参数也可以不自适应确定, 就能得到比较理想的效果.

实验先后通过对一幅文字图像和标准 lena 图像分别加高斯白噪声和乘性 speckle 噪声来比较新算子和林石算子定义的各向异性扩散方程的性能. 在本文中用的是平移不变 db4 小波软阈值, 阈值选用 matlab 中提供的 ddenomp 函数得到的默认阈值. 时间步长取 0.1. 图 1 和图 2 给出了实验结果, 左图均是加噪图像, 中间是林石算子处理后的图像, 右边是本文中新算子处理后的结果. 由实验结果可以看出新算子比林石算子能更好地去除噪声和保持图像的细节. 表 1 和表 2 中信噪比 (SNR)、峰值信噪比 (PSNR) 及均方根误差 (RMSE) 也从客观上表明了文中方法的优越性.

由图 1 和表 1 中的数据可以知道: 本文中新算子比林石算子的一个重要的优越性体现在对噪声强度高的高斯噪声污染的图像的处理效果也很理想. 林石算子只适合去除不太强的高斯噪声, 如果高斯噪声很强, 由于高斯噪声往往是颗粒状的, 林石算子对尖峰状的边缘有保留倾向, 所以在处理后的图像上会留下一些孤立的斑点. 而小波对高斯噪声处理的效果很好, 所以基于非线性小波阈值的扩散方程可以弥补林石算子不能处理高强度的高斯噪声的缺点, 对于高强度的高斯噪声处理的效果也很理想.

对于椒盐噪声, 新算子和林石算子处理后的图像质量较差. 所以该方法不适合于处理含有椒盐噪声的图像.

本文提出了一种基于非线性小波阈值的各向异性扩散方程. 在计算扩散系数时是在非线性小波阈值后的图像上估计各阶导数. 这样不但能够保持图像中的尖峰和窄边缘, 还能有效地去除噪声, 更好地保持边缘位置. 处理后的图像清晰度和对比度都大大增加. 与林石算子不同的是,

该算子对图像上均匀分布的高强度的高斯噪声处理效果很理想。

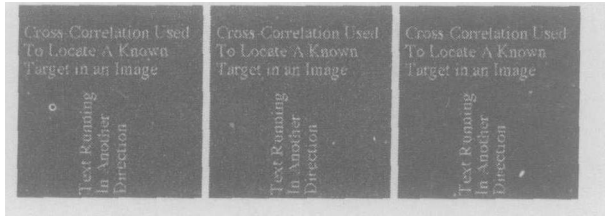


图 1 左边是加方差为 0.1 的高斯白噪声的一幅文字图像, 中间是林石算子处理的结果, 右边是文中新算子的处理结果, 迭代次数 10 次, $k = 10$



图 2 左边是加方差为 0.02 的 speckle 乘性噪声的 lena 图像, 中间是林石算子处理后的图像, 右边是本文中新算子处理的结果, 迭代次数 10 次, $K = 10$

表 1 性能参数比较

σ	加高斯噪声文字图像			林石算子			新算子		
	SNR	PSNR	RMSE	SNR	PSNR	RMSE	SNR	PSNR	RMSE
0.02	7.428	19.992	25.525	7.509	20.072	25.288	10.492	23.055	17.938
0.06	2.658	15.221	44.206	2.681	15.244	44.09	5.792	18.355	30.815
0.1	0.462	13.025	56.921	0.472	13.036	56.853	3.626	16.190	39.541

表 2 性能参数比较

V	加乘性噪声 lena 图像			林石算子			新算子		
	SNR	PSNR	RMSE	SNR	PSNR	RMSE	SNR	PSNR	RMSE
0.02	8.431	22.997	18.058	8.573	23.139	17.766	14.801	29.367	8.673
0.06	3.860	18.426	30.565	3.888	18.455	30.465	11.276	25.842	13.014
0.1	1.724	16.290	39.087	1.735	16.301	39.038	9.567	24.133	15.844

参考文献:

[1] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using an isotropic diffusion[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629- 639.

[2] Catté F, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM J Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182- 193.

[3] 林宙辰, 石青云. 一个能去噪和保持真实感的各向异性

扩散方程[J]. 计算机学报, 1999, 22(11): 1133- 1137.

Lin Z C, Shi Q Y. An anisotropic diffusion equation that can remove noise and keep naturalness[J]. Chinese Journal of Computers, 1999, 22(11): 1133- 1137 (in Chinese)

[4] Lin Z C, Shi Q Y. An anisotropic diffusion PDE for noise reduction and thin edge preservation[A]. Proc Tenth International Conference on Image Analysis and Processing [C]. IEEE Computer Society, Venice, Italy, 1999, 102- 107.

[5] Mrazek P, Weickert J, Steidl G. Correspondences between wavelet shrinkage and nonlinear diffusion[A]. Scale-Space methods in Computer Vision 4th International Conference Scale Space 2003[C]. Berlin: Springer, 2003, 101- 116.

[6] Mrazek P, Weickert J. Rotationally invariant wavelet shrinkage[A]. In B. Michaelis and G. Kneip, editors, Pattern Recognition, volume 2781 of Lecture Notes in Computer Science[C]. Berlin: Springer, 2003, 156- 163.

[7] Donoho D L. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613- 627.

[8] Coifman R R, Donoho D L. Translation invariant denoising[A]. Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics [C]. New York: Springer-Verlag, 1995, 125- 150.

[9] Canny J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8(6): 679- 698.

作者简介:



姜东焕 女, 1981 年出生于山东聊城, 现为西安电子科技大学应用数学系的博士研究生, 主要研究兴趣: 小波理论及其应用、偏微分方程理论、图像处理. E-mail: jdh-2002@163.com.

冯象初 男, 1962 年生于陕西西安, 教授, 博士生导师, 主要研究领域: 数值分析、小波理论及其应用、图像处理.

宋国乡 女, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为数值分析、小波理论及其应用.